Kółeczko na początek roku

wtorek, 6 stycznia 2009

1. Funkcja $\varphi(x, y, z)$ zdefiniowana dla trójek $(x, y, z) \in \mathbb{R}$ jest taka, że istnieją funkcje f, g zdefiniowane dla wszystkich par liczb rzeczywistych:
   $\varphi(x, y, z) = f(x + y, z) = g(x, y + z)$ dla $x, y, z \in \mathbb{R}$
   Pokaż, że istnieje funkcja h jednej zmiennej rzeczywistej spełniająca:
   $\varphi(x, y, z) = h(x + y + z)$ dla każdego $x, y, z \in \mathbb{R}$

2. Dwusieczne $\angle CAB$ i $\angle ABC$ trójkąta $\triangle ABC$ przecinają odpowiednio BC i CA w punktach D i F. Proste AD,BF przecinają prostą równoległą do AB i przechodzącą przez C odpowiednio w punktach E i G. FG=DE. Udowodnij, że CA=CB.

3. $r_1, r_2, \cdots, r_n \geqslant 1$ Udowodnij, że: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i+1} \geqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{r_1 r_2 \cdots r_n}}$

4. Niech a, n będą dodatnimi liczbami całkowitymi, zaś p nieparzystą liczbą pierwszą. Udowodnić, że jeśli p^α $(\alpha \in \mathbb{N})$ jest najwyższą potęgą p dzielącą $a - 1$, to dla każdej liczby całkowitej $\beta \geqslant 0$, $p^{\alpha+\beta} | a^n - 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p^\beta | n$.

5. Niech P będzie punktem wewnątrz ABC takim, że:
   $$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$$
   Niech D i E będą środkami okręgów wpisanych w APB i APC odpowiednio. Pokazać, że proste AP, BD, CE przecinają się w jednym punkcie.

6. Czy istnieje liczba, której sześcian równa się $3n^2 + 3n + 7, n \in \mathbb{N}$