Nierównosci

28.10.2008

1. Niech a, b, c będa dodatnimi liczbami rzeczywistymi spełniajacymi warunek:

$$ab + ac + bc + 2abc = 1$$

Udowodnić: $abc \leqslant \frac{1}{8}$

2. Dla dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c udowodnić:

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{a+c+1} + \frac{1}{b+c+1} \geqslant 1 \Rightarrow a + b + c \geqslant ab + ac + bc$$

3. Niech a, b, c będa dodatnimi liczbami rzeczywistymi spełniajacymi warunek: $ab + ac + bc = 1$. Udowodnić:

$$a^2 + b^2 + c^2 - a^2b^2c^2 \geqslant \frac{26}{27}$$

4. Dla dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c udowodnić:

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geqslant \frac{9}{4(a+b+c)}$$

5. Dla dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c udowodnić:

$$(a^2 + b^2)^2 \geqslant (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)$$

6. Niech a, b, c będa dodatnimi liczbami rzeczywistymi spełniajacymi warunek: $a + b + c = 1$. Udowodnić:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3abc} \leqslant 1$$

7. Dla dodatnich liczb rzeczywistych $a, b, c \in (0, 1)$ udowodnić:

$$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$$