Różne różności i nieróżności- kontynuacja

Zadanie 1. Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą. Pokazać, że jeżeli dla pewnego n zachodzi

$$p|n(n+1)(n+2)(n+3)+1$$

to dla pewnego m mamy $p|m^2-5$

Zadanie 2. Każdy z wektorów $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ ma długość $\leqslant 1$. Pokazac, że w wyrażeniu

$$\beta = \pm\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm ... \pm \alpha_n$$

można tak dobrać znaki aby $|\beta| \leqslant \sqrt{2}$.

Zadanie 3. Niech ω będzie okręgiem o środku w O, a AB i CD jego prostopadłymi cięciwami przecinającymi się w punkcie Q. Proste AC i BD przecinają się w P. Niech S_1 będzie punktem przecięcia prostych AB i PQ zaś S_2 punktem przecięcia się prostych CD i PQ. Pokazać, że prosta PQ jest styczna do okręgu opisanego na S_1S_2Q.

Zadanie 4. Pokazać, że dla nieskończenie wielu złożonych n zachodzi $n|3^{n-1}-2^{n-1}$

Zadanie 5. Niech a_k- dodatnie, oraz $a_{n+1}=a_1$. Pokazać, że

$$2\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+a_{k+1}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Zadanie 6. Niech x, y będą takimi dodatnimi liczbami naturalnymi, że $2x^2+x=3y^2+y$. Pokazać, że wówczas $x-y$ jest kwadratem liczby naturalnej.

Zadanie 7. Wielomian $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+1$ o nieujemnych współczynnikach posiada n pierwiastków rzeczywistych. Pokazać, że $P(2) \geqslant 3^n$