Wiatr od wschodu

Zadanie 1. Niech $ABCD$ będzie trapezem ($AB||CD$). Obierzmy $F \in AB$ taki, że $DF = CF$. Niech E będzie punkttem przeciecia AC i BD i niech O_1, O_2-środki okręgów opisanych na ADF i BCF. Pokoazać, że O_1O_2 i EF są prostopadłe.

Zadanie 2. Niech $ABCD$ będzie wypukłym czworokątem takim, że $\angle DAB = \angle ABC = \angle BCD$. Niech H, O będą odpowiednio ortocentrum i środkiem okręgu opisanego na ABC. Pokazać, że H, O, D są współliniowe.

Zadanie 3. Pokazać, że równanie

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3(x + y + z) + 5 = 0$$

nie posiada rozwiązań w liczbach wymiernych.

Zadanie 4. Znale"xć wszystkie funkcje ciągłe $f : R \to R$ takie, że dla każdego $x \in R$ zachodzi:

$$f(x) = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)$$

Zadanie 5. Na płaszczyźnie danych jest 111 wektorów jednostkowych o sumie równej 0. Pokazać, że istnieje wśród nich 55 wektożow, których suma ma długość mniejszą od 1.

Zadanie 6. Niech A będzie symetryczną macierzą zero-jedynkową (czyli $A_{ij} = A_{ji}$), przy czym dla każdego i mamy $A_{ii} = 1$. Pokaźać,że istnieje podzbiór wierszy, których suma jest wektorem o w szystkich współrzędnych nieparzystych.

Zadanie 7. Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną i niech $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + 1$. Załóżmy, że $a_k = a_{n-k}$ dla $k = 1, 2, ..., n-1$. Pokazać, że istnieje nieskończenie wiele par dodatnich liczb całkowitych x, y takich, że $y|P(x)$ i $x|P(y)$.