Kółko na dobry początek nowego roku

Zadanie 1 Niech O będzie punktem na prostej l, a $OP_1, OP_2, ..., OP_n$ wektorami jednostkowymi takimi, że punkty $P1, P_2, ..., P_n$ i prosta l leżą na tej samej płaszczyznie oraz wszystkie punkty P_i na tej samej półpłaszczyznie wyznaczonej przez l. Pokazać, że jeżeli n jest nieparzyste to

$$|OP_1 + OP_2 + ... + OP_n| \geqslant 1$$

Zadanie 2 Niech $P_1(x) = x^2 - 2$, $P_j(x) = P_1(P_{j-1}(x))$ dla $j = 2, 3, ...$ Pokazać, że dla dowolnego n wszystkie pierwiastki równania $P_n(x) = x$ są rzeczywiste i parami różne.

Zadanie 3 Mając

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319} = \frac{p}{q}$$

gdzie p, q są naturalne,względnie pierwsze, pokazać, że p jest podzielne przez 1979

Zadanie 4 Na płaszczyznie dane są dwa okręgi. Niech A będzie jednym z punktów przecięcia tych dwóch okręgów. Dwa punkty jednocześnie zaczynają sie poruszać ,każdy po własnym okręgu, startując z punktu A. Punkty te wracają z powrotem do A po tym samym czasie. Pokazać, że istnieje punkt P z tej płaszczyzny, taki, że w dowolnej chwili odległości P od ruchomych punktów są równe.

Zadanie 5 Dany jest punkt P na płaszczyznie π jak również punkt Q nienależący do π. Znaleźć wszystkie punkty R z płaszczyzny π maksymalizujące $\frac{QP+PR}{QR}$.

Zadanie 6 Niech $f(n)$ będzie funkcją $N^+ \to N^+$. Załóżmy, że $f(f(n) + f(m)) = n + m$ dla wszystkich wartości n, m. Znaleźć wszystkie możliwe wartości $f(1988)$.

Zadanie 7 Niech $f(n, r)$ będzie średnią arytmetyczną minimów wszystkich $r-$elementowych podzbiorów zbioru $\{1, 2, ..., n\}$. Pokazać, że $f(n, r) = \frac{n+1}{r+1}$