Zadania z Baltic Wayów - porcja II

Zadanie 1. Znaleźć wszystkie trójki dodatnich liczb całkowitych takich, że

$$a + b = gcd(a, b)^2$$

$$a + c = gcd(a, c)^2$$

$$b + c = gcd(b, c)^2$$

.

Zadanie 2. Niech x, y będą dodatnimi liczbami całkowitymi oraz niech $z = \frac{4xy}{x+y}$ będzie nieparzystą liczbą naturalną. Pokazać, że co najmniej jeden z dzielników z przystaje do 3 modulo 4.

Zadanie 3. Prostokątna tablica ma n wierszy i 6 kolumn, przy czym $n > 2$. W każdej komórce wpisane jest 0 albo 1. Wszystkie rzędy są parami różne. Dla dowolnych dwóch rzędów $(x_1, x_2, ..., x_6)$ i $(y_1, y_2, .., y_6)$ rząd $(x_1y_1, x_2y_2, ...x_6y_6)$ również znajduje się w tej macierzy. Pokazać, że istnieje kolumna w której co najmniej połowa liczb to zera.

Zadanie 4. Niech K, N - dodatnie liczby całkowite, przy czym $1 \leqslant K \leqslant N$. Talia N różnych kart jest tasowana poprzez powtarzanie czynności polegającej na odwróceniu kolejności K kart z góry talii i przełożeniu ich na spód talii. Pokazać, że karty wrócą do porządku wyjściowego nie później niż po $\frac{4N^2}{K^2}$ krokach.

Zadanie 5. Dany jest zbiór S czterech różnych punktów na płaszczyźnie. Dla każdego punktu $X \in S$ pozostałe mogą być nazwane W, Y, Z w taki sposób, że $|XY| = |XZ| + |XW|$. Pokazać, że te cztery punkty leżą na jednej prostej.

Zadanie 6. Punkty A, B, C, D, E leżą na okręgu c w takim porządku i spełniają $AB||EC$ i $AC||ED$. Prosta styczna do c w punkcie E przecina AB w punkcie P. Proste BD i EC przecinją się w Q. Pokazać, że $AC = PQ$

Zadanie 7. Mając dany romb $ABCD$ znajdź miejsce geometryczne punktów P leżących wewnątrz $ABCD$ i spełniających $\angle APD + \angle BPC = 180^0$.