Michał Miśkiewicz
Warsztaty Matematyczne

Równania diofantyczne

1 Teoria

1. **Równaniem diofantycznym** nazwiemy równanie o zmiennych będących liczbami całkowitymi.
2. Równanie $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = a$ ma rozwiązanie w liczbach całkowitych $x_1, \ldots, x_n$ wtedy i tylko wtedy gdy $(a_1, \ldots, a_n) \mid a$.
3. Wszystkie rozwiązania **równania Pitagorasa** $a^2 + b^2 = c^2$ przy założeniu $(a, b, c) = 1$ i $2 \mid a$ mają postać $a = 2pq$, $b = p^2 - q^2$, $c = p^2 + q^2$, gdzie $p \perp q$.
4. **Równaniem Pella** nazywamy równanie $a^2 - db^2 = 1$, gdzie d nie jest kwadratem liczby całkowitej. Ma ono nieskończenie wiele rozwiązań i potrafimy je wyznaczyć.

2 Zadania

1. Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie $x^3 + 2y^3 = 4z^3$.
2. Rozwiązać w liczbach całkowitych dodatnich równanie $x! + y! = z!$.
3. Wykazać, że równanie $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2010}$ ma skończoną liczbę rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich.
4. Wykazać, że równanie Fermata $x^n + y^n = z^n$ nie ma rozwiązań w $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$, gdy $x < n$.
5. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich n takich, że liczba
$$\frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n}$$
jest kwadratem liczby całkowitej. Liczba 1 oczywiście spełnia ten warunek. Znaleźć dwie kolejne najmniejsze takie liczby.
6. Wykazać, że równanie $x^{31} + y^{47} + z^{53} = t^{79}$ ma rozwiązanie w liczbach całkowitych dodatnich.
7. Udowodnij, że jeśli liczba $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ (a, b całkowite) jest całkowita, to jest kwadratem liczby całkowitej.

3 Szkice rozwiązań

1. Musi być $2|x$ itd., więc nie ma rozwiązań niezerowych.

2. Jedyne to $x = y = 1$, $z = 2$. Gdy $x > y$, mamy sprzeczność przy podzielności przez $y + 1$.

3. B.s.o. $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{3 \cdot 2010}$, czyli $1 \leqslant x \leqslant 3 \cdot 2010$ itd.

4. Gdy $y \geqslant n$, $z^n - y^n = (z - y)(z^{n-1} + \ldots + y^{n-1}) \geqslant 1 \cdot (n^{n-1} + \ldots + n^{n-1}) = n^n > x^n$. Gdy $y < n$, tym bardziej $z^n - y^n > x^n$.

5. Mamy $1^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{3}n(n + \frac{1}{2})(n + 1)$. Ponieważ $n + 1 \perp 2n + 1$, więc musi być $n + 1 = 6p^2, 2n + 1 = q^2$ (odpada) lub $n + 1 = 2p^2, 2n + 1 = 3q^2$. Należy rozwiązać równanie $12p^2 - q^2 = 1$ lub $4p^2 - 3q^2 = 1$.
   Odp. $\frac{1^2 + \ldots + 337^2}{337} = 195^2$, $\frac{1^2 + \ldots + 65521^2}{65521} = 37829^2$

6. Szukamy rozwiązań postaci $2^\alpha 3^\beta$. W tym celu tożsamość $1 + 2 + 3 = 6$ mnożymy przez $2^a 3^b$, dobierając a i b tak, żeby wykładniki dzieliły się przez odpowiednie liczby pierwsze.

7. Weźmy rozwiązanie $a \geqslant b$ takie, że $\frac{a^2+b^2}{ab+1} = k \in \mathbb{Z}^+$. Stąd równanie $x^2 - kb \cdot a + (b^2 - k) = 0$ ma rozwiązanie całkowite a, więc także drugie c. Ze wzoru Viete'a $ac = b^k$. Z oszacowania $-a^2 < b^2 - k < b^2 \leqslant a^2$ mamy $|c| < |a|$, więc rozwiązanie (b, c) jest mniejsze. Koniec jest w momencie gdy $c = 0$, czyli $k = b^2$.