Trygonometria I seria

1. Dla dowolnej liczby naturalnej n przyjmujemy $x_n = n \cdot \sin n^\circ$. Udowodnij, że

$$x_2 + x_4 + \ldots + x_{180} = 90 \cdot \mathrm{ctg} 1^\circ.$$

2. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n i każdej liczby rzeczywistej x z przedziału $(0, \pi)$ zachodzi równość

$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} > 0.$$

3. Dla danych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oraz $b_1, b_2, \ldots, b_n$ rozważmy funkcję f określoną wzorem

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cos(b_i + x).$$

Udowodnij, że jeśli $f(0) = f(1) = 0$, to $f(x) = 0$ dla każdego x.

Trygonometria II seria

4. Udowodnij, że jeśli $\cos x = \cos y$ oraz $\sin x = -\sin y$, to $\sin(1998x) + \sin(1998y) = 0$.

5. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n oraz dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$\sum_{k=0}^{n} |\cos(2^k x)| \geq \frac{n}{2}.$$

6. Niech P będzie takim wielomianem dwóch zmiennych, że dla każdej liczby rzeczywistej t zachodzi równość $P(\cos t, \sin t) = 0$. Udowodnij, że istnieje wielomian dwóch zmiennych Q taki, że

$$P(x, y) = (x^2 + y^2 - 1) \cdot Q(x, y)$$

Trygonometria III seria

7. Znajdź wszystkie współmierne z π liczby α takie, że $\cos \alpha$ jest wymierne.

8. Ciąg (a_n) zadany jest w następujący sposób: $a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (a_n)^2}}$. Oblicz

$$\lim_{n \to \infty} 2^n a_n.$$