Ciągi seria 0

0.1 Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n oraz dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$\sum_{k=0}^{n} |\cos(2^k x)| \geq \frac{n}{2}.$$

0.2 Znajdź wszystkie współmierne z π liczby α takie, że $\cos\alpha$ jest wymierne.

0.3 Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n i każdej liczby rzeczywistej x z przedziału $(0, \pi)$ zachodzi nierówność

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n} > 0.$$

Ciągi I seria

1. Ciąg (a_n) jest określony następująco:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = 15,\ a_n = 15a_{n-2} - 4a_{n-3}.$$

Udowodnij, że jeśli liczba a_n jest pierwsza, to n też jest pierwsza.

2. Rozważmy ciąg (x_n) określony następująco:

$$x_1 = a,\ x_2 = b,\ x_{n+2} = x_{n+1} + x_n,$$

gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi.

Liczbę c będziemy nazywać wartością wielokrotną ciągu (x_n), jeżeli istnieją co najmniej dwie różne liczby całkowite dodatnie k i l takie, że $x_k = x_l = c$.

Wykaż, że nie można tak dobrać liczb a i b, aby ciąg miał nieskończenie wiele wartości wielokrotnych.

Ciągi II seria

3. Ciąg (a_n) określony jest następująco:

- $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$
- $a_{n+1} = a_n - a_{n-1} + \frac{a_n^2}{a_{n-2}}$

Udowodnij, że żaden wyraz tego ciągu nie jest podzielny przez 4.

4. Dana jest liczba naturalna k. Określamy ciąg (a_n) wzorami

$$a_1 = k + 1,\ a_{n+1} = a_n^2 - ka_n + k.$$

Wykaż, że jeśli $m \neq n$, to liczby a_m i a_n są względnie pierwsze.

Ciągi III seria

5. Wielomian całkowitoliczbowy $ax^2 + bx + c$ daje wartości będące kwadratami liczb naturalnych dla wszystkich x naturalnych. Udowodnij, że wielomian ten jest kwadratem innego wielomianu całkowitoliczbowego.

6. Niech π będzie dowolną permutacją zbioru $\{1, 3, \ldots, 2n-1\}$. Udowodnij, że zachdzi następująca nierówność:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i^2 + \pi(i)^2} \geq \frac{n}{2}\sqrt{1 + 5n^2}.$$

7. Ciąg (a_n) zadany jest w następujący sposób: $a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (a_n)^2}}$. Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} 2^n a_n.$$